

### Esercizio n.16

Due cariche  $q_1=8q$  e  $q_2=-2q$  sono poste sull'asse  $x$  a distanza  $L=20$  cm.

Calcolare i punti dell'asse  $x$  in cui

- Il potenziale elettrico è nullo
- Il campo elettrico è nullo

Soluzione:

Scegliamo il sistema di riferimento con origine sulla carica  $q_1$ .

Il potenziale in un punto generico  $P \equiv (x,0)$  dell'asse  $x$ , per il principio di sovrapposizione, vale:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left( \frac{q_1}{|x|} + \frac{q_2}{|x-L|} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left( \frac{8q}{|x|} + \frac{-2q}{|x-L|} \right) = \frac{q}{2\pi\epsilon_o} \left( \frac{4}{|x|} - \frac{1}{|x-L|} \right)$$

$V(P)=0$  quando

$$\frac{4}{|x|} - \frac{1}{|x-L|} = 0 \Rightarrow \frac{4}{|x|} = \frac{1}{|x-L|} \quad (1)$$

Per risolvere la (1) bisogna distinguere vari casi, tenendo conto della definizione della funzione modulo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}:$$

- se  $x > L$ , cioè se  $P$  è a destra di  $q_2$  come in figura, allora la (1) diventa

$$\frac{4}{x} = \frac{1}{x-L} \Rightarrow x = \frac{4}{3}L = 26,67 \text{ cm}$$

- se  $0 < x < L$ , cioè se  $P$  si trova tra  $q_1$  e  $q_2$ , allora la (1) diventa

$$\frac{4}{x} = \frac{1}{-(x-L)} \Rightarrow x = \frac{4}{5}L = 16 \text{ cm}$$

- se  $x < 0$ , cioè se  $P$  si trova a sinistra di  $q_1$ , allora la (1) diventa

$$\frac{4}{-x} = \frac{1}{-(x-L)} \Rightarrow x = \frac{4}{3}L = 26,67 \text{ cm}$$

che non è una soluzione accettabile perché non verifica la condizione  $x < 0$ : a sinistra di  $q_1$  il potenziale non si annulla mai, come è facile capire tenendo conto che il potenziale della carica  $8q$  ha in questa zona valore sempre maggiore del valore assoluto del potenziale della carica  $-2q$ .

In un punto generico  $P \equiv (x,0)$  dell'asse  $x$ , il campo elettrostatico generato dalle due cariche è diretto come l'asse  $x$  e vale

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left( \frac{q_1}{|x|^2} \hat{u}_1 + \frac{q_2}{|x-L|^2} \hat{u}_2 \right) = \frac{q}{2\pi\epsilon_o} \left( \frac{4}{x^2} \hat{u}_1 - \frac{1}{(x-L)^2} \hat{u}_2 \right)$$

dove  $\hat{u}_i$  è il versore che individua la posizione di  $P$  rispetto alla carica  $q_i$ .

In particolare, possiamo scrivere

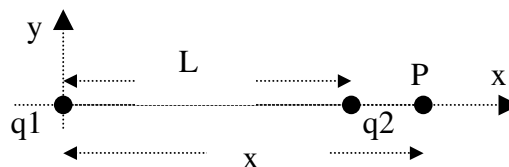
$$\hat{u}_1 = \frac{x}{|x|} \hat{u}_x \quad \text{e} \quad \hat{u}_2 = \frac{x-L}{|x-L|} \hat{u}_x \quad \text{dove } \hat{u}_x \text{ è il versore dell'asse } x.$$

Il campo è nullo quando

$$\vec{E}(P) = \frac{q}{2\pi\epsilon_o} \left( \frac{4}{x^2} \frac{x}{|x|} - \frac{1}{(x-L)^2} \frac{x-L}{|x-L|} \right) \hat{u}_x = 0 \Rightarrow \frac{4}{x^2} \frac{x}{|x|} = \frac{1}{(x-L)^2} \frac{x-L}{|x-L|} \quad (2)$$

Per risolvere la (2) bisogna distinguere vari casi,

- se  $x > L$ , cioè se  $P$  è a destra di  $q_2$  come in figura, allora la (2) diventa



$$\frac{4}{x^2} = \frac{1}{(x-L)^2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2L = 40cm \\ x_2 = \frac{2}{3}L = 13,34cm \end{cases}$$

la soluzione  $x_2$  non è accettabile non verificando la condizione  $x > L$

- se  $0 < x < L$ , cioè se P si trova tra  $q_1$  e  $q_2$ , allora la (2) diventa

$$\frac{4}{x^2} = -\frac{1}{(x-L)^2}$$

che non ha soluzioni reali essendo  $\Delta = 64L^2 - 80L^2$ ; quindi tra le due cariche non c'è alcun punto dove in campo elettrico è nullo, come è ovvio visto che in questa zona i campi di  $q_1$  e  $q_2$  sono concordi.

- se  $x < 0$ , cioè se P si trova a sinistra di  $q_1$ , allora la (2) diventa

$$-\frac{4}{x^2} = -\frac{1}{(x-L)^2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2L = 40cm \\ x_2 = \frac{2}{3}L = 13,34cm \end{cases}$$

nessuna di queste due soluzioni è accettabile perché non verifica la condizione  $x < 0$ : a sinistra di  $q_1$  il campo non si annulla mai, come era prevedibile tenendo conto che il campo della carica  $8q$ , pur essendo opposto a quello della carica  $-2q$ , ha modulo sempre maggiore.

In conclusione l'unico punto dell'asse  $x$  in cui il campo elettrico si annulla è il punto  $x=40$  cm (che dista da 20 cm da  $q_2$ ).